INISTERE DE L'URBANISME
ET DU LOGEMENT

E.I. T.P.E. 1982

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)
- OPTION M -
(temps accordé : 4 heures)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$). L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique, définie par

$$\| x \| = \| (x_1, .., x_n) \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

Muni de la distance associée à cette norme, définie par $d(x,y) = \|x - y\|$, c'est un espace métrique. Dans toute la suite, $\mathbb{R}^n$ sera muni de la topologie ainsi définie.

On notera $< x,y >$ le produit scalaire de x et y.

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si, chaque fois qu'elle contient deux points a et b, elle contient le segment $[a,b]$ qui les joint (c'est-à-dire l'ensemble des $ta + (1-t)b$, t décrivant l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$).

1°) Montrer l'identité : $\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (1)

En déduire que si a, b et c sont trois points de $\mathbb{R}^n$, m désignant le milieu de $[b,c]$ (c'est-à-dire $m = \frac{b+c}{2}$), on a :

$$\| a-b \|^2 + \|a-c\|^2 = 2 \| a-m\|^2 + \frac{1}{2} \| b-c\|^2 \quad (2)$$

2°) La distance d'un point a à une partie fermée A d'un espace métrique étant définie par $d(a,A) = \inf_{x \in A} d(a,x)$, une projection de a sur A est un point α de A tel que $d(a,A) = d(a,\alpha)$.

On se propose de démontrer que si A est une partie convexe, fermée, non vide de $\mathbb{R}^n$, alors chaque point a de $\mathbb{R}^n$ a une projection et une seule sur A.

Pour cela, a étant un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, considérer une suite $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ de points de A telle que $d(a,x_p)$ tende vers $d(a,A)$ pour p tendant vers l'infini, et utiliser la question précédente pour établir que la suite $\{x_p\}$ est une suite de Cauchy.

Conclure, en justifiant clairement chaque étape du raisonnement.

3°) On vient de définir le projecteur sur le convexe fermé non vide A, application qui sera notée P_A dans la suite, par :

(i) $P_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad P_A x \in A$

(iii) $\forall y \in A \quad \|x - P_A x\| \leq \|x - y\|$

.../...

Le but de cette question est d'établir une nouvelle caractérisation de la projection $P_A x$ du point x sur A, soit :

$$(3) \quad \forall\, y \in A \quad \langle x - P_A x, P_A x - y \rangle \geqslant 0$$

a) Montrer que cela équivaut à montrer l'égalité des ensembles E_1 et E_2 définis par

$$E_1 = \{z \in A \mid \forall\, y \in A \quad \|x - z\| \leqslant \|x - y\| \}$$

$$E_2 = \{z \in A \mid \forall\, y \in A \quad \langle x - z, z - y \rangle \geqslant 0\}$$

b) Montrer cette égalité. On pourra commencer par établir l'identité

(4) $\|x - y\|^2 - \|x - z\|^2 = 2\langle x - z, z - y\rangle + \|z - y\|^2$, et en déduire directement l'inclusion $E_2 \subset E_1$; pour prouver l'inclusion inverse, on pourra écrire (4) en remplaçant y par $y_t = ty + (1-t)z$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

4°) Montrer que l'inégalité (3) est encore équivalente à la suivante

(5) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle x - P_A x, P_A x - P_A y \rangle \geqslant 0$.

5°) On rappelle qu'un cône de sommet 0 (dans $\mathbb{R}^n$) est un ensemble C invariant par toute homothétie strictement positive ; c'est-à-dire $\forall \lambda > 0$, $\lambda C = C$

On définit, à partir d'un cône C de sommet 0, l'ensemble polaire de C, noté $C^\perp$, par :

$$C^\perp = \{x^\perp \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C, \langle x, x^\perp \rangle \leqslant 0\}$$

a) Montrer que $C^\perp$ est un cône de sommet 0 convexe et fermé.

b) Si C est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, que trouve-t-on par l'opération $\perp$?

6°) Soit C un cône convexe fermé de sommet 0 et $C^\perp$ son cône polaire. On se propose de démontrer le théorème suivant :

tout point x de l'espace $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire, de façon unique,

$x = y + y^\perp$ avec $y \in C$, $y^\perp \in C^\perp$ et $\langle y, y^\perp \rangle = 0$.

a) Montrer tout d'abord l'unicité de la décomposition, dont on supposera ici l'existence, et qu'elle est nécessairement de la forme :

$$x = P_C x + P_{C^\perp} x$$

b) Montrer que $x - P_C x$ est un élément de $C^\perp$ et en déduire une décomposition de x en une somme de deux vecteurs appartenant respectivement à C et $C^\perp$.

Montrer, pour achever la démonstration du théorème, que ces deux vecteurs sont orthogonaux (on pourra utiliser l'inégalité (3)).

FIN

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail